黒木玄 Gen Kuroki
@genkuroki

みんな大好きマクローリン展開

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}, \\
\cos x &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \\
\sin x &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\
-\log(1-x) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n}, \\
\log(1+x) &= \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \\
(1+x)^a &= \sum_{k=0}^\infty \binom{a}{k} x^k, \\
\binom{a}{k} &= \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}.
\end{aligned}
$$

2017年05月31日 07:37 · Web · 0 · 5 · Webで開く

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki on May 31

$$
\begin{aligned}
(-1)^k \binom{-1/2}{k} &= \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{2k}}, \\
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \sum_{k=0}^\infty \binom{2k}{k} \frac{x^{2k}}{2^{2k}}, \\
\arcsin x &= \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{2k}} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \\
\frac{\pi}{2} &= \sum_{k=0}^\infty \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{2k}} \frac{1}{2k+1}.
\end{aligned}
$$

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 31

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k x^{2k}, \\
&\arctan x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}, \\
&\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{2k+1}.
\end{aligned}
$$

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 31

The Cauchy-Schwarz inequality:

$$
\begin{aligned}
&\int dx\,|f(x)|^2 \int dy\,|g(y)|^2 - \int dx\,f(x)\overline{g(x)} \int dy\,\overline{f(y)}g(y) \\
&= \int dx \int dy \left[\overline{f(x)g(y)}f(x)g(y) - \overline{f(y)g(x)}f(x)g(y)\right] \\
&= \frac{1}{2}\int dx \int dy \Big[\overline{f(x)g(y)}f(x)g(y) + \overline{f(y)g(x)}f(y)g(x) \\
&\qquad\qquad - \overline{f(y)g(x)}f(x)g(y) - \overline{f(x)g(y)}f(y)g(x)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\int dx \int dy\,|f(x)g(y) - f(y)g(x)|^2 \\
&\geqq 0.
\end{aligned}
$$

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 31

みんな大好き、一次近似

$|x|$ が小さいとき

$$
\begin{aligned}
&e^x \approx 1 + x, \\
&\cos x \approx 1, \\
&\sin x \approx x, \\
&\tan x \approx x, \\
&\log(1+x) \approx x, \\
&(1+x)^a \approx 1 + ax.
\end{aligned}
$$

例：$\sqrt{10} = 3.16227766\cdots,$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{10} &= 3\sqrt{1+\frac{1}{9}} \\
&\approx 3\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{9}\right) \\
&= 3+\frac{1}{6} \\
&= 3.166666\cdots,
\end{aligned}
$$

相対誤差は0.14%弱。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 31

みんな大好き、Stirlingの近似公式

$n\to\infty$で

$$
\begin{aligned}
n! &= n^n e^{-n}\sqrt{n}\sqrt{2\pi} \\
&\times \left[1+\frac{1}{12n}+O(n^{-2})\right].
\end{aligned}
$$

対数版も頻出

$$
\begin{aligned}
\log n! = n\log n - n + \frac{1}{2}\log n \\
+\log\sqrt{2\pi}+\frac{1}{12n}+O(n^{-2}).
\end{aligned}
$$

$1/(12n)$で補整すれば $n=1$ でも誤差は0.1%程度

$$e^{-1}\sqrt{2\pi}(1+1/12) = 0.99898\cdots$$

補整しなくても $n=9$ で誤差は1%を切る:

$$\frac{9!}{9^9e^{-9}\sqrt{18\pi}} = \frac{362880}{359536.87\cdots} \approx 1.0093$$

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 31

列: $k!$ を $f(k)=k^ke^{-k}\sqrt{2\pi k}$ で近似すると、

$$
\begin{gathered}
\binom{15}{5} = 3003, \\
\frac{f(15)}{f(5)f(10)} \approx 3062
\end{gathered}
$$

誤差は2%弱。

例: 対数を取れば

$$n! \approx n^n$$

という近似でさえ実用的だぞ!

たとえば $n = 6 \times 10^{26}$ のとき

$$\log n! \approx 3.63954 \times 10^{28},$$
$$\log n^n \approx 3.69954 \times 10^{28}.$$

balian @balian on May 31

@genkuroki 確かに好き（笑）

balian @balian on May 31

@genkuroki このシリーズ、PDFのCheatSheetにして配ると良いと思う。

mathtod.online powered by Mastodon